Flächenberechnungen

W. Kippels

14. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

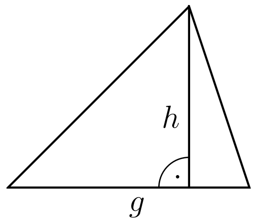
Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: **mail@dk4ek.de**

Vielen Dank!

2 Dreiecke

2.1 Allgemeines Dreieck

Zur Berechnung der Fläche eines Dreieckes benötigt man eine Grundseite und die **zugehörige** Höhe. Man kann **jede beliebige** Seite als Grundseite wählen, entscheidend ist aber, dass die dazugehörige Höhe dazu einen **Rechten Winkel** bildet. Die Dreieckfläche wird damit wie folgt berechnet:



> ***Die Fläche eines Dreieckes ist das halbe Produkt aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe.***

Nennt man die Grundseite g und die Höhe h, dann lautet die Formel für die Dreieckfläche:

$$\boxed{A = \frac{g \cdot h}{2}}$$

2.2 Rechtwinkliges Dreieck

Ist das Dreieck **Rechtwinklig**, dann wählt man sinnvollerweise eine der Katheten als Grundseite. Wegen des Rechten Winkels ist dann die andere Kathete die Höhe. Die Fläche eines Rechtwinkligen Dreieckes wird damit wie folgt berechnet:

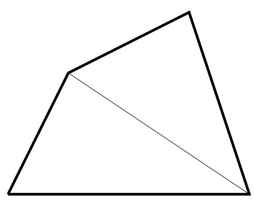
> ***Die Fläche eines Rechtwinkligen Dreieckes ist das halbe Produkt aus den beiden Katheten.***

Wenn wir die beiden Katheten mit a und b bezeichnen, dann lautet die Formel für die Fläche eines Rechtwinkligen Dreieckes:

$$\boxed{A = \frac{a \cdot b}{2}}$$

3 Vierecke

Für das allgemeine Viereck ohne Besonderheiten gibt es keine Rechenformel. Man kann es jedoch immer durch eine Diagonale in zwei Dreiecke aufteilen, die dann mit der Dreieckformel berechnet werden können.

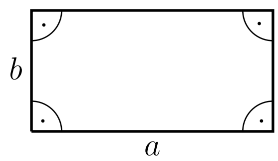


Es gibt jedoch eine ganze Reihe spezieller Vierecke, für die es jeweils eigene Berechnungsformeln gibt.

3.1 Rechteck

3.1.1 allgemeines Rechteck

Ein Viereck mit vier Rechten Winkeln nennt man **Rechteck**. Die gegenüberliegenden Seiten sind dabei jeweils gleich lang. Die Fläche eines Rechteckes ist sehr einfach zu berechnen.



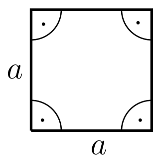
> ***Die Fläche eines Rechteckes ist das Produkt aus den beiden Rechteckseiten.***

Bezeichnen wir die Rechteckseiten mit a und b, dann erhalten wir diese Formel:

$$\boxed{A = a \cdot b}$$

3.1.2 Quadrat

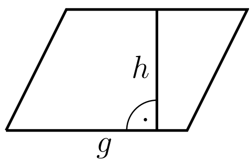
Als Spezialfall eines Rechteckes gibt es noch das Quadrat. Hier sind alle Seiten gleich lang. Wenn die Quadratseiten mit a bezeichnet werden, lautet die Berechnungsformel:



$$\boxed{A = a^2}$$

3.2 Parallelogramm

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem die **gegenüberliegenden** Seiten jeweils parallel verlaufen. Dadurch sind sie auch jeweils gleich lang. Man kann ein Rechteck daher auch als einen Spezialfall eines Parallelogrammes mit Rechten Winkeln betrachten.



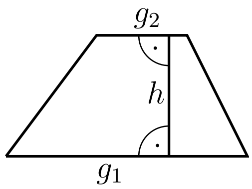
Zur Berechnung der Fläche eines Parallelogramms benötigt man eine Grundseite und die **zugehörige** Höhe. Welche Seite man als Grundseite wählt, ist gleichgültig, die Höhe muss nur zu dieser Seite einen Rechten Winkel bilden. Damit ist die Parallelogrammfläche recht einfach zu berechnen.

> ***Die Fläche eines Parallelogramms ist das Produkt aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe.***

Bezeichnet man die Grundseite mit g und die Höhe mit h, dann erhält man diese Formel:

$$\boxed{A = g \cdot h}$$

3.3 Trapez

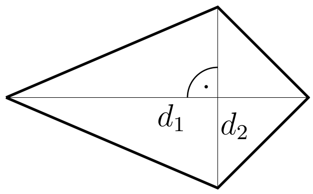


Ein Trapez ist ein Viereck mit **zwei parallelen** Seiten. Ein Parallelogramm ist somit eigentlich ein Spezialfall eines Trapezes.

Die beiden parallelen Seiten werden **erste** und **zweite Grundseite** genannt, den **Abstand** der Grundseiten nennt man **Höhe**. Wenn man die beiden Grundseiten mit g_1 und g_2 und die Höhe mit h bezeichnet, erhält man folgende Formel zur Berechnung der Fläche eines Trapezes:

$$\boxed{A = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h}$$

3.4 Drachenviereck



Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem jeweils zwei benachbarten Seiten gleich lang sind. Das führt dazu, dass sich die beiden Diagonalen rechtwinklig schneiden.

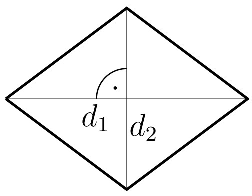
Weil das so ist, eignen sich die Diagonalen gut zur Berechnung der Fläche.

> ***Die Fläche eines Drachenviereckes ist das halbe Produkt aus den beiden Diagonalen.***

Bezeichnet man die Diagonalen mit d_1 und d_2, dann erhält man folgende Formel zur Berechnung der Fläche:

$$\boxed{A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

3.5 Raute



Die Raute ist ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Weil das dazu führt, dass die sich jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel sind, kann man eine Raute sowohl als Spezialfall eines Parallelogramms, als auch als Spezialfall eines Drachenvierecks betrachten. Daher kann man die Fläche sowohl mit der Formel für das Drachenviereck, als auch mit der Formel für das Parallelogramm bestimmen. Was günstiger ist, hängt schlicht davon ab, welche Größen bekannt sind. Kennt man die Diagonalen – wie in der Skizze angedeutet – dann nimmt man die Drachenviereckformel, kennt man eine Grundseite mit zugehöriger Höhe, dann verwendet man die Parallelogrammformel. Die Formeln hier zu wiederholen erübrigt sich meines Erachtens.

4 Wohnflächenberechnung

Etwas ganz anderes als die „mathematische“ Flächenberechnung ist die „juristische“ Flächenberechnung, hier die Berechnung einer Wohnfläche. Dabei geht es um die Grundfläche im Grundriss, die letztlich für den Mietpreis entscheidend ist. Meist haben die Flächen ein rechteckiges Format, es gibt aber gelegentlich auch andere Formen wie beispielsweise ein Trapez oder (noch seltener) ein Dreieck.

Zunächst kommen die gleichen Formeln zum Einsatz, die hier schon im „mathematischen“ Teil beschrieben worden sind. Dann sind aber noch zwei Aspekte wichtig.

- Sind Dachschrägen vorhanden, die die Zimmerhöhe beeinträchtigen?
- Welche Zweckbestimmung hat der jeweilige Raum?

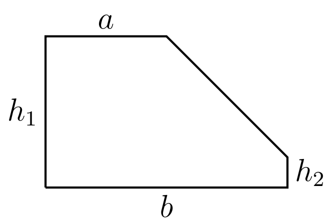
4.1 Dachschrägen

Beginnen wir mit Teil 1. Sind in dem Raum Dachschrägen vorhanden, gelten folgende Regelungen:

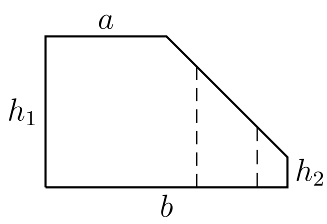
- ***Alle Raumteile mit mindestens 2 Meter Höhe werden zu 100% berücksichtigt.***
- ***Alle Raumteile mit einer Höhe zwischen 1 und 2 Meter Höhe werden zu 50% berücksichtigt.***
- ***Alle Raumteile mit einer Höhe unter 1 Meter Höhe werden nicht berücksichtigt.***

4.2 Beispiel 1

Ein Wohnraum hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum ist 5 Meter lang und 4 Meter breit. Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Bekannt sind diese Maße:
$a = 2\,\mathrm{m}$
$b = 4\,\mathrm{m}$
$h_1 = 2{,}5\,\mathrm{m}$
$h_2 = 0{,}5\,\mathrm{m}$
Gesucht ist die Wohnfläche dieses Raumes.



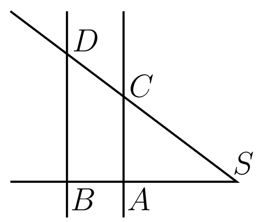
Lösung: Zunächst tritt sofort folgendes Problem auf: In welchen Bereichen ist die Deckenhöhe mindestens 2 Meter, wo zwischen 1 und 2 Meter und wo unter 1 Meter? In der nebenstehenden Skizze sind diese Bereiche markiert. Wo aber liegen diese Bereiche? Die Grenzen müssen irgendwie berechnet werden.



Hier hilft der **Zweite Strahlensatz** weiter. Er besagt folgendes:

> ***An einem von zwei Parallelen geschnittenen Zweistrahl ist das Verhältnis der Parallelenabschnitte gleich dem Verhältnis der zugehörigen Strahlenabschnitte.***

Was bedeutet das? Um den Lehrsatz etwas besser zu verstehen habe ich nebenstehend eine zu den Strahlensätzen gehörende Planfigur erstellt. Die Schnittpunkte zwischen Strahlen und Parallelen sind mit den Bezeichnungen A bis D, den Schnittpunkt der Strahlen mit S bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann der Strahlensatz als Formel:

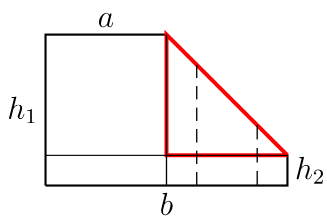


$$\boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}}$$

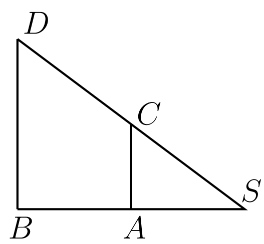
Hierbei bedeutet $\overline{AC}$ die Strecke zwischen A und C, usw.

Das können wir nun auf unsere Planskizze der Seitenwand übertragen. Hier habe ich noch zwei weitere Hilfslinien eingetragen, eine waagerechte und eine senktechte.

Von besonderem Interesse ist das zusätzlich eingezeichnete rote Dreieck. In dem können wir nämlich den eben angesprochenen Zweiten Strahlensatz anwenden.



Damit besser Bezeichnungen eingetragen werden können, ist dieses Dreiech nebenstehend etwas größer dargestellt. Anstelle der beiden Teilhöhen (die gestrichelten Linien) habe ich stellvertretend nur eine einzige eingetragen. Das ist die Strecke $\overline{AC}$. Dann ist die Länge der Strecke $\overline{BD}$ die Differenz der Höhen:



$$\overline{BD} = h_1 - h_2 = 2{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}5\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$$

Auch die Strecke $\overline{SB}$ kann ausgerechnet werden:

$$\overline{SB} = b - a = 4\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$$

Jetzt möchte ich den Bereich ausrechnen, in dem die Deckenhöhe weniger als 1 Meter beträgt.In der Planskizze ist das die Strecke $\overline{SA}$. Weil die Strecke $\overline{SA}$ um die Höhe h_2 über dem Fußbodenniveau liegt, ist die Strecke $\overline{AC}$ um diesen Wert kürzer.

$$\overline{AC} = 1\,\text{m} - h_2 = 1\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} = 0{,}5\,\text{m}$$

Mit diesen Werten kann nun die Strecke $\overline{SA}$ mit dem Zweiten Strahlensatz berechnet werden.
Ein Tipp: Es ist immer sinnvoll, mit der **gesuchten** Größe im Zähler anzufangen.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} \\
\frac{0{,}5\,\text{m}}{2\,\text{m}} &= \frac{\overline{SA}}{2\,\text{m}} \quad |\cdot 2\,\text{m} \\
0{,}5\,\text{m} &= \overline{SA}
\end{aligned}$$

Damit ist klar: In einem Streifen von 50 cm Breite an der rechten Seite wird keine Fläche für die Wohnflächenberechnung gezählt.

Jetzt kommt noch der Abstand von der rechten Wand, bei der die Höhe genau 2 Meter beträgt. Weil ich wieder die selbe Planskizze verwenden möchte, heißt diese Länge ebenfalls $\overline{SA}$. Daher muss die Strecke $\overline{AC}$ hierfür neu berechnet werden.

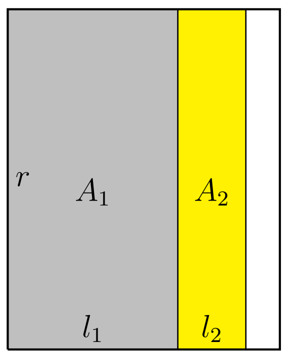
$$\overline{AC} = 2\,\text{m} - h_2 = 1\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} = 1{,}5\,\text{m}$$

Wieder wird der Zweite Strahlensatz angewendet:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} \\
\frac{1{,}5\,\text{m}}{2\,\text{m}} &= \frac{\overline{SA}}{2\,\text{m}} \quad |\cdot 2\,\text{m} \\
1{,}5\,\text{m} &= \overline{SA}
\end{aligned}$$

Ergebnis: In einem Abstand von 1,5 Metern von der rechten Wand ist die Deckenhöhe genau 2 Meter.

Jetzt können wir den Grundriss skizzieren. In diesem Grundriss gibt es drei Bereiche:



Im linken grauen Bereich (Fläche A_1) ist die Deckenhöhe über 2 Meter. Hier wird die Fläche voll berechnet.

Im mittleren gelben Bereich (Fläche A_2) ist die Deckenhöhe zwischen 1 und 2 Meter. Hier wird die Fläche nur zu 50% berechnet.

Im rechten weißen Bereich ist die Deckenhöhe unter 1 Meter. Hier wird die Fläche nicht berechnet.

Beginnen wir mit der Fläche A_1. Ihr rechter Rand ist – wie eben berechnet – 1,5 Meter von der rechten Wand entfernt. Damit und mit der Raumbreite $b = 4\,\mathrm{m}$ kann die Rechteckseite l_1 von A_1 berechnet werden.

$$l_1 = b - 1{,}5\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m} - 1{,}5\,\mathrm{m} = 2{,}5\,\mathrm{m}$$

Mit der Raumlänge $r = 5\,\mathrm{m}$ und l_1 kann nun A_1 berechnet werden:

$$A_1 = r \cdot l_1 = 5\,\mathrm{m} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = 12{,}5\,\mathrm{m}^2$$

Der rechte Rand der Fläche A_2 liegt 0,5 Meter vom rechten Rand entfernt. Damit und mit l_1 und b kann nun l_2 berechnet werden.

$$l_2 = b - l_1 - 0{,}5\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m} - 2{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}5\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$$

$$A_2 = r \cdot l_2 = 5\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}^2$$

Jetzt kommen wir endlich zur Wohnfläche:

$$\begin{aligned} A_{\text{Wohn}} &= 100\,\% \cdot A_1 + 50\,\% \cdot A_2 \\ &= 1 \cdot 12{,}5\,\mathrm{m}^2 + 0{,}5 \cdot 5\,\mathrm{m}^2 \\ A_{\text{Wohn}} &= 15\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Wohnfläche des Raumes beträgt $15\,\mathrm{m}^2$.

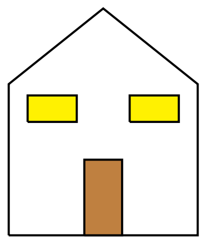
5 Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

In einem Kindergarten soll ein rechteckiger Sandkasten mit 3 Meter Breite und 5 Meter Länge angelegt werden. Dazu muss auf dieser Fläche die Erde 10 Zentimeter tief ausgehoben werden. Wenn der Hausmeister das mit einem Spaten macht, benötigt er pro Quadratmeter 10 Minuten. Wie lange wäre er beschäftigt?

5.2 Aufgabe 2

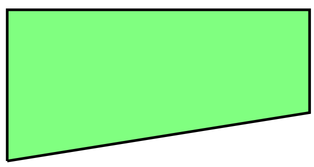
Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 6 Meter hoch, an den Seiten 4 Meter. Die Tür ist 1 Meter breit und 2 Meter hoch. Die Fenster haben je eine Breite von 1,80 Metern und sind 90 Zentimeter hoch.



Die Fenster und die Tür werden **nicht** mitgestrichen. Prüfen Sie rechnerisch, ob ein Eimer mit 5 Liter Inhalt ausreicht. Ein Liter reicht für vier Quadratmeter.

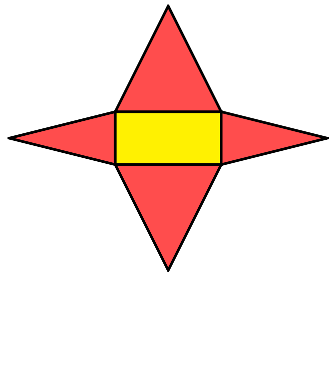
5.3 Aufgabe 3

Nebenstehend ist eine Rasenfläche auf einem Grundstück dargestellt. Die Rasenfläche hat eine Gesamtlänge von 36 Metern. Auf der Westseite ist es 15 Meter und auf der Ostseite 10 Meter breit. Die Grundstücksecken an der Nordseite stellen Rechte Winkel dar. Wie lange benötigt der Gärtner für das Mähen der Rasenfläche, wenn er in 6 Minuten eine Fläche von 50 Quadratmetern mähen kann?



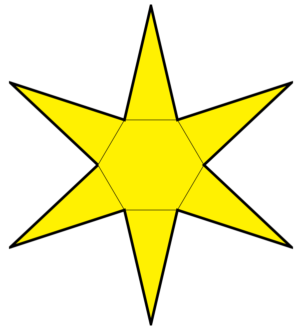
5.4 Aufgabe 4

Nebenstehendes Muster soll als Weihnachtsdekoration aus farbigem Karton hergestellt werden. Die Dreiecke sollen rotfarbig sein, das Rechteck gelb. Damit dieser Weihnachtsstern zusammenhält, wird zunächst die Gesamtfigur aus rotem Karton ausgeschnitten. Anschließend wird das gelbe Rechteck aufgeklebt. Das Rechteck ist 20 Zentimeter lang und 10 Zentimeter breit. Alle Dreiecke sind gleichschenklig und haben eine Höhe von je 20 Zentimeter. Der verwendete Karton hat ein Gewicht von 250 Gramm je Quadratmeter. Wieviel Gramm wiegt der fertige Weihnachtsstern?



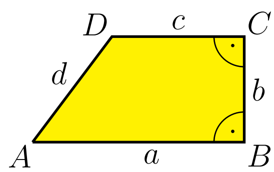
5.5 Aufgabe 5

Nebenstehender Stern soll aus einem DIN-A4-Blatt ausgeschnitten werden. Ein DIN-A4-Blatt ist 210 Millimeter breit und 297 Millimeter lang.
Der Stern besteht aus einem regelmäßigen Sechseck in der Mitte und sechs gleichen Gleichschenkligen Dreiecken darum herum. Das Sechseck hat eine Seitenlänge von je 4 Zentimetern. Der Abstand von je zwei sich gegenüberliegenden Seiten beträgt 6,9 Zentimeter, die Entfernung zweier sich gegenüberliegenden Ecken 8 Zentimeter. Alle Dreiecke haben eine eine Höhe von 8,6 Zentimetern.
Wieviel Prozent Verschnitt ergibt sich durch das Ausschneiden aus einem DIN-A4-Blatt?



5.6 Aufgabe 6

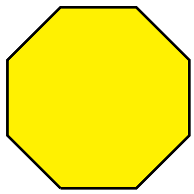
Die Fläche des nebenstehenden Trapezes soll berechnet werden. Gegeben sind folgende Maße:
$a = 24\,\text{cm}$
$b = 12\,\text{cm}$
$d = 15\,\text{cm}$
Bei B und C liegt jeweils ein Rechter Winkel.



5.7 Aufgabe 7

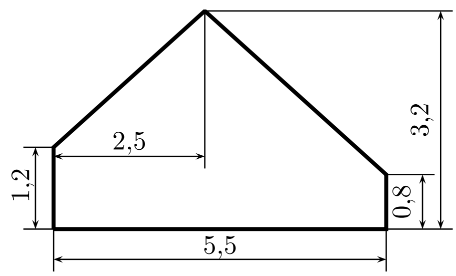
Auf einem Hof soll ein Bereich farbig gepflastert werden, der die Form eines regelmäßiges Achteckes dargestellt. Das bedeutet, dass alle Winkel und alle Seiten gleich sind. Alle Seiten haben eine Länge von 2 Metern, alle Winkel betragen 135°.

Berechnen Sie die Gesamtfläche dieses Achteckes!



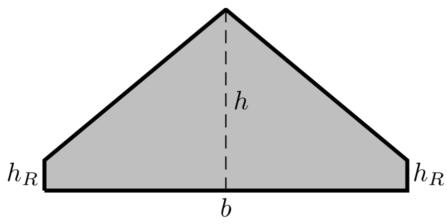
5.8 Aufgabe 8

Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum ist 6 Meter lang und 5,5 Meter breit. Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Bekannt sind die eingetragenen Maße, die alle in der Einheit *Meter* angegeben sind.
Gesucht ist die Wohnfläche dieses Raumes.



5.9 Aufgabe 9

Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum hat eine Länge von $l = 8\,\text{m}$ und eine Breite von $b = 6\,\text{m}$. In der Mitte hat der Raum eine Höhe von $h = 3\,\text{m}$, an den Rändern beträgt die Raumhöhe $h_R = 50\,\text{cm}$. Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Die Form der Wand ist symmetrisch. Gesucht ist die gesamte Wohnfläche dieses Raumes.



6 Lösungen der Übungsaufgaben

6.1 Aufgabe 1

In einem Kindergarten soll ein rechteckiger Sandkasten mit 3 Meter Breite und 5 Meter Länge angelegt werden. Dazu muss auf dieser Fläche die Erde 10 Zentimeter tief ausgehoben werden. Wenn der Hausmeister das mit einem Spaten macht, benötigt er pro Quadratmeter 10 Minuten. Wie lange wäre er beschäftigt?

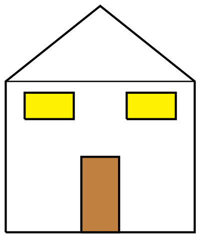
Lösung: Der Sandkasten stellt ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 3\,\mathrm{m}$ und $b = 5\,\mathrm{m}$ dar. Die Rechteckformel wird verwendet.

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= 3\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} \\ A &= 15\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Hausmeister benötigt für jeden Quadratmeter 10 Minuten. Er wäre also $15\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{min}}{\mathrm{m}^2} = 150$ Minuten oder umgerechnet 2 Stunden und 30 Minuten beschäftigt.

6.2 Aufgabe 2

Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 6 Meter hoch, an den Seiten 4 Meter. Die Tür ist 1 Meter breit und 2 Meter hoch. Die Fenster haben je eine Breite von 1,80 Metern und sind 90 Zentimeter hoch.



Die Fenster und die Tür werden **nicht** mitgestrichen. Prüfen Sie rechnerisch, ob ein Eimer mit 5 Liter Inhalt ausreicht. Ein Liter reicht für vier Quadratmeter.

Lösung: Zunächst wird die Frontfläche in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegt. Ist diese Frontfläche bestimmt, müssen die Flächen von Fenster und Tür davon subtrahiert werden.

Beginnen wir mit der Rechteckfläche. Ich nenne sie $A_\square$.

$$A_\square = a \cdot b = 4\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}^2$$

Es folgt die Dreieckfläche $A_\triangle$. Die Grundseite des Dreieckes ist die Frontbreite mit $g = 5\,\mathrm{m}$. Die Dreieckhöhe h ist die Differenz aus der Fronthöhe in der Mitte und der Fronthöhe am Rand.

$$h = 6\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$$

$$A_\triangle = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{5\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m}}{2} = 5\,\mathrm{m}^2$$

Zusammengesetzt ergibt das die gesamte Frontfläche A_{Fr}.

$$A_{Fr} = A_\square + A_\triangle = 20\,\mathrm{m}^2 + 5\,\mathrm{m}^2 = 25\,\mathrm{m}^2$$

Es folgt die Berechnung der Türfläche A_T.

$$A_T = a \cdot b = 1\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}^2$$

Jetzt wird die Fläche eines Fensters A_{Fe} berechnet. Hierzu muss die Fensterhöhe von 90 Zentimetern noch in Meter umgewandelt werden.

$$A_{Fe} = a \cdot b = 1{,}80\,\mathrm{m} \cdot 0{,}90\,\mathrm{m} = 1{,}62\,\mathrm{m}^2$$

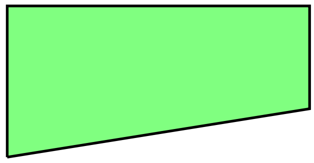
Damit kann die gesamte zu streichende Fläche berechnet werden.

$$A_{ges} = A_{Fr} - A_T - 2 \cdot A_{Fe} = 25\,\mathrm{m}^2 - 2\,\mathrm{m}^2 - 2 \cdot 1{,}62\,\mathrm{m}^2 = 19{,}76\,\mathrm{m}^2$$

Ergebnis: Ein Eimer mit 5 Litern zu je $4\,\mathrm{m}^2$ reicht für $5 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 = 20\,\mathrm{m}^2$. Also reicht ein Eimer (knapp) aus.

6.3 Aufgabe 3

Nebenstehend ist eine Rasenfläche auf einem Grundstück dargestellt. Die Rasenfläche hat eine Gesamtlänge von 36 Metern. Auf der Westseite ist es 15 Meter und auf der Ostseite 10 Meter breit. Die Grundstücksecken an der Nordseite stellen Rechte Winkel dar. Wie lange benötigt der Gärtner für das Mähen der Rasenfläche, wenn er in 6 Minuten eine Fläche von 50 Quadratmetern mähen kann?



Lösung: Zunächst wird die Rasenfläche berechnet. Sie hat die Form eines Trapezes. Die parallelen Seiten, die die Grundseiten g_1 und g_2 darstellen, sind die westliche und die östliche Begrenzung mit 15 und 10 Metern Länge. Die Länge der Nordseite mit 36 Metern Länge ist dann die Höhe h des Trapezes.

$$A = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{15\,\mathrm{m} + 10\,\mathrm{m}}{2} \cdot 36\,\mathrm{m} = 450\,\mathrm{m}^2$$

Die Zeit für die Mäharbeit kann mit einem Dreisatz berechnet werden.[1]

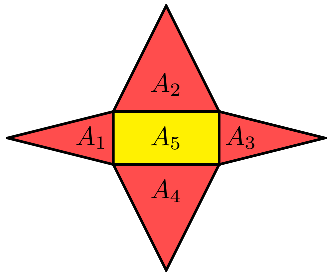
$$\begin{array}{rrcll}
 & 50\,\mathrm{m}^2 & \widehat{=} & 6\,\mathrm{min} & \\
 & 450\,\mathrm{m}^2 & \widehat{=} & ?\,\mathrm{min} & \\
\hline
 & 50\,\mathrm{m}^2 & \widehat{=} & 6\,\mathrm{min} & \\
:50 \downarrow & 1\,\mathrm{m}^2 & \widehat{=} & \dfrac{6\,\mathrm{min}}{50} & \downarrow :50 \\
\cdot 450 \downarrow & 450\,\mathrm{m}^2 & \widehat{=} & \dfrac{6\,\mathrm{min} \cdot 450}{50} = 54\,\mathrm{min} & \downarrow \cdot 450
\end{array}$$

<u>Ergebnis:</u> Der Gärtner benötigt zum Mähen der Rasenfläche 54 Minuten.

[1] Näheres zum Dreisatz siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/3satz.pdf

6.4 Aufgabe 4

Nebenstehendes Muster soll als Weihnachtsdekoration aus farbigem Karton hergestellt werden. Die Dreiecke sollen rotfarbig sein, das Rechteck gelb. Damit dieser Weihnachtsstern zusammenhält, wird zunächst die Gesamtfigur aus rotem Karton ausgeschnitten. Anschließend wird das gelbe Rechteck aufgeklebt. Das Rechteck ist 20 Zentimeter lang und 10 Zentimeter breit. Alle Dreiecke sind gleichschenklig und haben eine Höhe von je 20 Zentimeter. Der verwendete Karton hat ein Gewicht von 250 Gramm je Quadratmeter. Wieviel Gramm wiegt der fertige Weihnachtsstern?



Lösung: Zunächst werden alle Teilflächen bezeichnet, beispielsweise wie hier durch Hineinschreiben eines passenden Namens. Die Flächen A_1 und A_3 sind identisch, ebenso die Flächen A_2 und A_4. Somit gibt es **drei unterschiedliche** Flächen, die berechnet werden müssen.

Berechnung eines kleinen Dreieckes:

$$A_1 = A_3 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{10\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm}}{2} = 100\,\text{cm}^2$$

Berechnung eines großen Dreieckes:

$$A_2 = A_4 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{20\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm}}{2} = 200\,\text{cm}^2$$

Berechnung des Rechteckes:

$$A_5 = a \cdot b = 20\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 200\,\text{cm}^2$$

Gesamtfläche Rot:

$$A_{rot} = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + A_5 = 2 \cdot 100\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 200\,\text{cm}^2 + 200\,\text{cm}^2 = 800\,\text{cm}^2$$

Gesamtfläche alle Pappe:

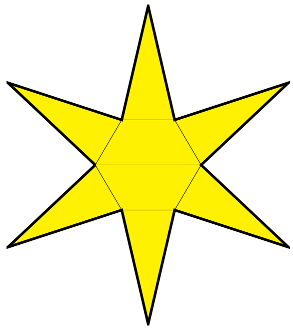
$$A_{ges} = A_{rot} + A_5 = 800\,\text{cm}^2 + 200\,\text{cm}^2 = 1\,000\,\text{cm}^2 = 0{,}1\,\text{m}^2$$

Gesamtgewicht:

$$m = 0{,}1\,\text{m}^2 \cdot 250\,\frac{\text{g}}{\text{m}^2} = 25\,\text{g}$$

Ergebnis: Der Pappstern wiegt 25 Gramm.

6.5 Aufgabe 5



Nebenstehender Stern soll aus einem DIN-A4-Blatt ausgeschnitten werden. Ein DIN-A4-Blatt ist 210 Millimeter breit und 297 Millimeter lang.
Der Stern besteht aus einem regelmäßigen Sechseck in der Mitte und sechs gleichen Gleichschenkligen Dreiecken darum herum. Das Sechseck hat eine Seitenlänge von je 4 Zentimetern. Der Abstand von je zwei sich gegenüberliegenden Seiten beträgt 6,9 Zentimeter, die Entfernung zweier sich gegenüberliegenden Ecken 8 Zentimeter. Alle Dreiecke haben eine eine Höhe von 8,6 Zentimetern.
Wieviel Prozent Verschnitt ergibt sich durch das Ausschneiden aus einem DIN-A4-Blatt?

Lösung: Es müssen zwei verschiedene Flächenformen berechnet werden, ein Sechseck und 6 gleiche Dreiecke. Beginnen wir mit dem Sechseck. Da wir keine Formel für ein Rechteck haben, muss diese Fläche in berechenbare Teilflächen zerlegt werden. Eine von mehreren Möglichkeiten ist hier angedeutet – eine Zerlegung in zwei Trapeze. Eine Trapezfläche nenne ich A_T.

$$A_T = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{4\,\text{cm} + 8\,\text{cm}}{2} \cdot 3{,}45\,\text{cm} = 20{,}7\,\text{cm}^2$$

Eine Dreieckfläche nenne ich $A_\triangle$.

$$A_\triangle = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4\,\text{cm} \cdot 8{,}6\,\text{cm}}{2} = 17{,}2\,\text{cm}^2$$

Damit kann die Gesamtfläche des Sterns A_S berechnet werden.

$$A_S = 2 \cdot A_T + 6 \cdot A_\triangle = 2 \cdot 20{,}7\,\text{cm}^2 + 6 \cdot 17{,}2\,\text{cm}^2 = 144{,}6\,\text{cm}^2$$

Die Gesamtfläche eines DIN-A4-Blattes A_D wird berechnet:

$$A_D = 21\,\text{cm} \cdot 29{,}7\,\text{cm} = 623{,}7\,\text{cm}^2$$

Die Fläche des Verschnittes A_V wird berechnet:

$$A_V = A_D - A_S = 623{,}7\,\text{cm}^2 - 144{,}6\,\text{cm}^2 = 479{,}1\,\text{cm}^2$$

Der Verschnitt wird in Prozent[2] berechnet:

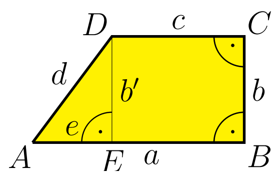
$$P_s = \frac{P_w \cdot 100\,\%}{G} = \frac{479{,}1\,\text{cm}^2 \cdot 100\,\%}{623{,}7\,\text{cm}^2} = 76{,}8\,\%$$

Ergebnis: Der Verschnitt beträgt 76,8 Prozent.

[2] Näheres zur Prozentrechnung siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/prozent.pdf

6.6 Aufgabe 6

Die Fläche des nebenstehenden Trapezes soll berechnet werden.
Gegeben sind folgende Maße:
$a = 24\,\text{cm}$
$b = 12\,\text{cm}$
$d = 15\,\text{cm}$
Bei B und C liegt jeweils ein Rechter Winkel.



Lösung: Wegen der beiden Rechten Winkel bei B und C ist die Seite b gleichzeitig die Höhe des Trapezes. Die Seiten a und c sind die beiden Grundseiten, die man ebenfalls in der Formel benötigt.

Weil die Seite c nicht bekannt ist, muss diese zunächst bestimmt werden. Dazu wird die Hilfslinie $\overline{DE} = b'$ eingezeichnet, die eine Parallele zu b darstellt. Sie hat ebenfalls die Länge b. Dadurch ist das Rechtwinklige Dreieck ΔAED entstanden mit b' und e als Katheten und der Hypotenuse d. Mit dem Satz des Pythagoras[3] kann die Hilfslänge e berechnet werden.

$$\begin{aligned}
e^2 + b'^2 &= d^2 && |-b'^2\\
e^2 &= d^2 - b'^2 && |\sqrt{\ }\\
e &= \sqrt{d^2 - b'^2}\\
&= \sqrt{(15\,\text{cm})^2 - (12\,\text{cm})^2}\\
&= \sqrt{225\,\text{cm}^2 - 144\,\text{cm}^2}\\
&= \sqrt{81\,\text{cm}^2}\\
e &= 9\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Aus den Längen a und e ergibt sich c.

$$c = a - e = 24\,\text{cm} - 9\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$$

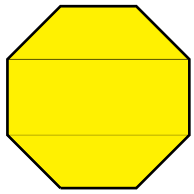
Nun kann mit der Flächenformel die Trapezfläche berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h\\
&= \frac{a + c}{2} \cdot b\\
&= \frac{24\,\text{cm} + 15\,\text{cm}}{2} \cdot 12\,\text{cm}\\
A &= 234\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

<u>Ergebnis:</u> Die Trapezfläche beträgt $A = 234\,\text{cm}^2$.

[3] Näheres zum Satz des Pythagoras siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/pythagoras.pdf

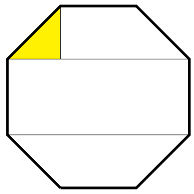
6.7 Aufgabe 7



Auf einem Hof soll ein Bereich farbig gepflastert werden, der die Form eines regelmäßiges Achteckes dargestellt. Das bedeutet, dass alle Winkel und alle Seiten gleich sind. Alle Seiten haben eine Länge von 2 Metern, alle Winkel betragen 135°.

Berechnen Sie die Gesamtfläche dieses Achteckes!

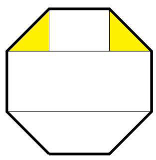
Lösung: Zunächst kann die Gesamtfläche in ein Rechteck und zwei Trapeze aufgeteilt werden, wie oben dargestellt. Leider sind weder die Breite des Rechteckes noch die Höhe der Trapeze bekannt. Diese Größen müssen vorab bestimmt werden.



Es bietet sich an, die Aufteilung noch etwas weiter fortzusetzen, wie nebenstehend dargestellt. Ich möchte das Augenmerk auf das markierte Dreieck oben links richten. Das Dreieck ist rechtwinklig, die beiden Katheten sind gleich lang. Die Länge der Hypotenuse ist eine Seite des Achteckes. Sie ist mit 2 Metern bekannt.

In diesem Dreieck kann die Länge der Katheten mit Hilfe des Satzes des Pythagoras[4] berechnet werden. Ich benenne die Kateten mit k und die Hypotenuse mit h.

$$\begin{aligned}
h^2 &= k^2 + k^2 \\
h^2 &= 2 \cdot k^2 & &|\sqrt{} \\
h &= \sqrt{2} \cdot k & &|:\sqrt{2} \\
\frac{h}{\sqrt{2}} &= k \\
k &= \frac{2\,\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \\
k &= 1{,}414\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$



Hiermit kann jetzt die Länge des Rechteckes in der Mitte berechnet werden. Aus Symmetriegründen gibt es auch auf der rechten Seite ein solches Dreieck mit der gleichen Kathetenlänge k. Die Rechtecklänge besteht dann aus einer Seitenlänge h und zwei Kathetenlängen k. Ich nenne die Rechtecklänge a und erhalte:

$$a = k + h + k = 1{,}414\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m} + 1{,}414\,\mathrm{m} = 4{,}828\,\mathrm{m}$$

Jetzt kann die Rechteckfläche A_R berechnet werden.

$$A_R = a \cdot h = 4{,}828\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 9{,}656\,\mathrm{m}^2$$

[4] Näheres zum Satz des Pythagoras siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/pythagoras.pdf

Die Trapeze haben die Höhe k, die erste Grundseite a und die zweite Grundseite k. Die Trapezfläche A_T wird berechnet:

$$A_T = \frac{a+h}{2} \cdot k = \frac{4{,}828\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m}}{2} \cdot 1{,}414\,\mathrm{m} = 4{,}827\,\mathrm{m}^2$$

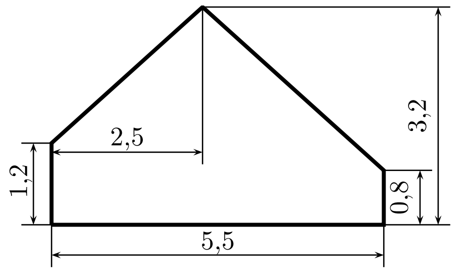
Damit kann die Gesamtfläche A berechnet werden.

$$A = A_R + 2 \cdot A_T = 9{,}656\,\mathrm{m}^2 + 2 \cdot 4{,}827\,\mathrm{m}^2 = 19{,}31\,\mathrm{m}^2$$

Ergebnis: Die Gesamtfläche der Pflasterung beträgt $A = 19{,}31\,\mathrm{m}^2$.

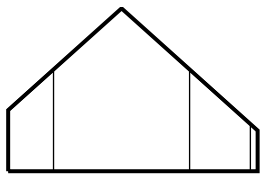
6.8 Aufgabe 8

Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum ist 6 Meter lang und 5,5 Meter breit. Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Bekannt sind die eingetragenen Maße, die alle in der Einheit *Meter* angegeben sind.

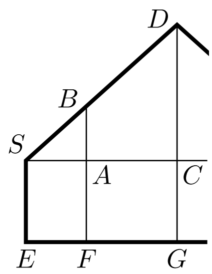


Gesucht ist die Wohnfläche dieses Raumes.

Lösung: Bevor mit der Wohnflächenberechnung begonnen werden kann, muss zunächst festgestellt werden, wo die Deckenhöhe **genau einen** bzw. **genau zwei** Meter beträgt, denn dort liegen die Grenzen für die Berechnungen. Die drei Stellen sind hier nebenstehend mit einer dünnen Linie eingezeichnet.



Beginnen wir mit der linken Linie in dem linken Teil der Wandfläche. Hier ist die Decke genau 2 Meter hoch. Dazu zeichne ich eine Planfigur mit dem linken Teil der Wand. Eingezeichnet wird außerdem noch eine waagerechte Hilfslinie in der Höhe der linken Wand sowie sowie die Höhe zur Dachspitze. Die interessanten Punkte werden mit Bezeichnungen versehen.



Hier kann man die Grundfigur zur Anwendung der Strahlensätze erkennen. Die Strahlen beginnen bei S und verlaufen nach rechts Richtung C und nach schräg oben Richtung D. Die Parallelen sind die senkrechten Hilfslinien von b nach F und von D nach G.

Bekannt sind die Strecken $\overline{SE} = 1{,}2\,\mathrm{m}$ (identisch mit den Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{CG}$), die Strecke $\overline{SC} = 2{,}5\,\mathrm{m}$, die Strecke $\overline{DG} = 3{,}2\,\mathrm{m}$ sowie die Strecke $\overline{BF} = 2\,\mathrm{m}$. Aus diesen Daten lassen sich die Parallelenabschnitte $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ berechnen. Somit kommt anschließend der **zweite** Strahlensatz zur Anwendung.

$$\overline{AB} = \overline{BF} - \overline{AF} = 2\,\mathrm{m} - 1{,}2\,\mathrm{m} = 0{,}8\,\mathrm{m}$$

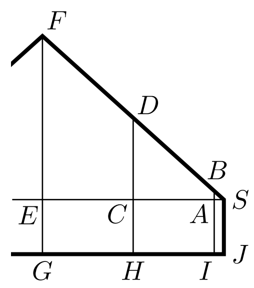
$$\overline{CD} = \overline{DG} - \overline{CG} = 3{,}2\,\mathrm{m} - 1{,}2\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{SA}$. Sie lässt sich nun mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes berechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \\
\frac{\overline{SA}}{2{,}5\,\text{m}} &= \frac{0{,}8\,\text{m}}{2\,\text{m}} \\
\frac{\overline{SA}}{2{,}5\,\text{m}} &= 0{,}4 \qquad | \cdot 2{,}5\,\text{m} \\
\overline{SA} &= 1\,\text{m}
\end{aligned}$$

Somit ist klar: In einem Streifen von 1 Meter Breite beträgt am linken Rand des Raumes die Deckenhöhe zwischen einem und zwei Meter, die zugehörige Fläche ist bei der Wohnflächenberechnung somit nur halb zu berücksichtigen.

Kümmern wir uns nun um den rechten Teil des Raumes. Hier gibt es zwei Grenzen bei der Raumhöhe, bei einem Meter (Strecke $\overline{BI}$) und bei zwei Meter (Strecke $\overline{DH}$). Bekannt ist die Strecke $\overline{SJ} = 0{,}8\,\text{m}$ (identisch mit den Strecken $\overline{AI}$, $\overline{CH}$ und $\overline{EG}$) und die Strecke $\overline{FG} = 3{,}2\,\text{m}$. Die Strecke $\overline{SE}$ kann aus den angegebenen Daten errechnet werden.



$$\overline{SE} = 5{,}5\,\text{m} - 2{,}5\,\text{m} = 3\,\text{m}$$

Ich möchte als nächstes sie Strecke $\overline{SC}$ berechnen. Dazu betrachte ich den Zweistrahl der beiden Strahlen, die bei S beginnen und nach E bzw. nach F verlaufen. Die beiden senkrechten Hilfslinien durch F und G sowie durch D und H sind nun die Parallelen, auf die ich den zweiten Strahlensatz beziehen möchte. Dazu fehlen mir noch die Längen der Parallelenabschnitte $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$, die aber leicht aus den angegebenen Daten berechnet werden können.

$$\overline{CD} = \overline{DH} - \overline{CH} = 2\,\text{m} - 0{,}8\,\text{m} = 1{,}2\,\text{m}$$

$$\overline{EF} = \overline{FG} - \overline{EG} = 3{,}2\,\text{m} - 0{,}8\,\text{m} = 2{,}4\,\text{m}$$

Mit diesen Werten kann der zweite Strahlensatz zur Bestimmung der Strecke $\overline{SC}$ angesetzt werden.
Zur Erinnerung: Es ist immer sinnvoll, mit der **gesuchten** Größe im Zähler anzufangen.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SC}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \\
\frac{\overline{SC}}{3\,\text{m}} &= \frac{1{,}2\,\text{m}}{2{,}4\,\text{m}} \\
\frac{\overline{SC}}{3\,\text{m}} &= 0{,}5 \qquad | \cdot 3\,\text{m} \\
\overline{SC} &= 1{,}5\,\text{m}
\end{aligned}$$

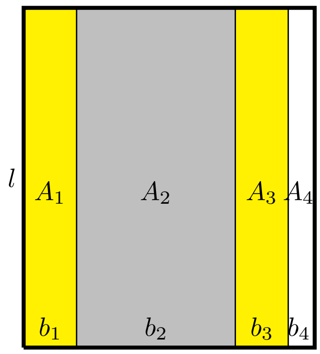
Nun kommt die Strecke $\overline{SA}$ an die Reihe. Zur Berechnung wird dazu die Länge der Strecke $\overline{AB}$ benötigt. Die kann aus den gegebenen Werten berechnet werden.

$$\overline{AB} = \overline{BI} - \overline{AI} = 1\,\text{m} - 0{,}8\,\text{m} = 0{,}2\,\text{m}$$

Mit dem zweiten Strahlensatz kann der Ansatz zur Berechnung der Strecke $\overline{SA}$ gemacht werden. Auch hier beginne ich mit der gesuchten Größe.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \\
\frac{\overline{SA}}{3\,\text{m}} &= \frac{0{,}4\,\text{m}}{2{,}4\,\text{m}} \qquad\qquad | \cdot 3\,\text{m} \\
\overline{SA} &= \frac{0{,}4\,\text{m}}{2{,}4\,\text{m}} \cdot 3\,\text{m} \\
\overline{SA} &= 0{,}5\,\text{m}
\end{aligned}$$

Jetzt können wir den Grundriss skizzieren. In diesem Grundriss gibt es vier Bereiche:



Die linke gelbe Fläche A_1: Hier liegt die Deckenhöhe zwischen 1 und 2 Meter, die Fläche wird nur zu 50% berücksichtigt.

Die grau Fläche A_2 in der Mitte: Hier ist die Decke mehr als 2 Meter hoch, die Fläche wird zu 100% berücksichtigt.
Die rechte gelbe Fläche A_3: Hier liegt die Deckenhöhe zwischen 1 und 2 Meter, die Fläche wird nur zu 50% berücksichtigt.

Die weiße Fläche A_4 ganz rechts: Hier liegt die Deckenhöhe unter 1 Meter, die Fläche wird nicht berücksichtigt.

Beginnen wir mit A_1. Die Streifenbreite b_1 wurde im ersten Teil als $b_1 = \overline{SA} = 1\,\text{m}$ berechnet, die Raumlänge $l = 6\,\text{m}$ ist in der Aufgabenstellung angegeben.

$$A_1 = l \cdot b_1 = 6\,\text{m} \cdot 1\,\text{m} = 6\,\text{m}^2$$

Die Breite b_2 für die Fläche A_2 muss noch ausgerechnet werden. Das geschieht mit $\overline{SA} = 1\,\text{m}$ aus der linken Hälfte und $\overline{SC} = 1{,}5\,\text{m}$ aus der rechten Hälfte.

$$b_2 = 5{,}5\,\text{m} - \overline{SA} - \overline{SC} = 5{,}5\,\text{m} - 1\,\text{m} - 1{,}5\,\text{m} = 3\,\text{m}$$

Hiermit kann A_2 berechnet werden:

$$A_2 = l \cdot b_2 = 6\,\text{m} \cdot 3\,\text{m} = 18\,\text{m}^2$$

Weiter geht es mit der Fläche A_3. Dafür wird die Breite b_3 benötigt. In der Planfigur für die rechte Wandhälfte ist b_3 mit der Strecke $\overline{AC}$ identisch.

$$b_3 = \overline{AC} = \overline{SC} - \overline{SA} = 1{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}5\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$$

Damit kann A_3 berechnet werden.

$$A_3 = l \cdot b_3 = 6\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}^2$$

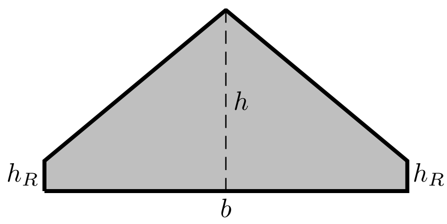
Aus allen drei Teilflächen wird nun die Gesamtfläche A berechnet.

$$\begin{aligned} A &= 50\,\% \cdot A_1 + 100\,\% \cdot A_2 + 50\,\% \cdot A_3 \\ &= 0{,}5 \cdot 6\,\mathrm{m}^2 + 1 \cdot 18\,\mathrm{m}^2 + 0{,}5 \cdot 6\,\mathrm{m}^2 \\ A &= 24\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die gesamte Wohnfläche beträgt: $\boxed{A = 24\,\mathrm{m}^2}$

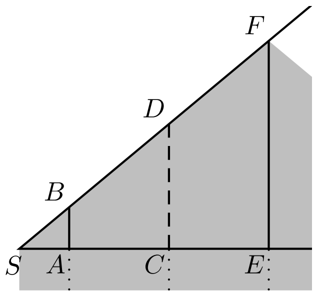
6.9 Aufgabe 9

Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum hat eine Länge von $l = 8\,\text{m}$ und eine Breite von $b = 6\,\text{m}$. In der Mitte hat der Raum eine Höhe von $h = 3\,\text{m}$, an den Rändern beträgt die Raumhöhe $h_R = 50\,\text{cm}$. Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Die Form der Wand ist symmetrisch. Gesucht ist die gesamte Wohnfläche dieses Raumes.



Lösung: Bevor die Wohnfläche berechnet werden kann, müssen die Bereiche bestimmt werden, in denen die Deckenhöhe unter 1 Meter, zwischen 1 und 2 Meter oder über 2 Meter beträgt. Ich beginne mit dem Randbereich unter 1 Meter.

Als Planfigur genügt wegen der Symmetrie der Wandfläche die linke Hälfte. In die Wandfläche habe ich einige Hilfslinien eingezeichnet und wichtige Punkte mit Buchstaben benannt. Der Punkt S liegt in 50 Zentimeter Höhe am linken Rand, wo die Dachschräge auf die Wand trifft. Eine waagerechte Hilfslinie verläuft in dieser Höhe durch die Punkte A und E. Weiterhin wurde die Raumhöhe h in Raummitte im Punkt F und die Hilfslinie bei der Raumhöhe von genau 1 Meter bei B eingetragen. Damit erhalten wir einen von Parallelen geschnittenen Zweistrahl und können die Strahlensätze anwenden. Die gestrichelt miteingezeichnete Raumhöhe im Punkt D soll uns dabei zunächst nicht interessieren.



Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ sind jeweils Um die Rand-Raumhöhe h_R kürzer, als die jeweiligen Höhen.

$$\overline{AB} = 1\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} = 0{,}5\,\text{m}$$
$$\overline{EF} = 3\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} = 2{,}5\,\text{m}$$

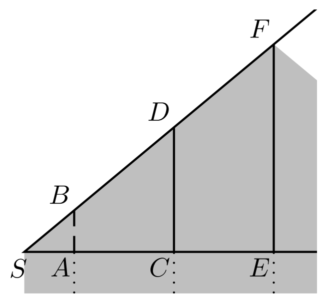
Auch die Strecke $\overline{SE}$ kann berechnet werden. Es ist die halbe Raumbreite b.

$$\overline{SE} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{m} = 3\,\text{m}$$

Die Lösung kann mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes angesetzt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \\
\frac{\overline{SA}}{3\,\text{m}} &= \frac{0{,}5\,\text{m}}{2{,}5\,\text{m}} \qquad | \cdot 3\,\text{m} \\
\overline{SA} &= \frac{0{,}5\,\text{m}}{2{,}5\,\text{m}} \cdot 3\,\text{m} \\
\overline{SA} &= 0{,}6\,\text{m}
\end{aligned}$$

Als nächstes kümmern wir uns nun um die Grenze der Raumhöhe bei 2 Metern. Die Planfigur ist im Prinzip die selbe, jedoch interessiert hier nicht mehr die Strecke $\overline{AB}$. Deswegen ist sie hier nur gestichelt eingezeichnet.



Die Strecken $\overline{SE}$ und $\overline{EF}$ haben wir eben schon berechnet, wir benötigen noch die Strecke $\overline{CD}$.

$$\overline{CD} = 2\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} = 1{,}5\,\text{m}$$

Für die Wohnflächenberehnung benötigen wir eigentlich die Strecke $\overline{AC}$. Da wir den zweiten Strahlensatz nutzen müssen, weil Abschnitte auf den Parallelen involviert sind, müssen die Abschnitte auf dem Strahl, den wir verwenden wollen, immer im gemeinsamen Strahlenanfang S beginnen. Deswegen berechnen wir zunächst die Strecke $\overline{SC}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SC}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \\
\frac{\overline{SC}}{3\,\text{m}} &= \frac{1{,}5\,\text{m}}{2{,}5\,\text{m}} && |\cdot 3\,\text{m} \\
\overline{SC} &= \frac{1{,}5\,\text{m}}{2{,}5\,\text{m}} \cdot 3\,\text{m} \\
\overline{SC} &= 1{,}8\,\text{m}
\end{aligned}$$

Damit kann die Streifenbreite berechnet werden, in dem die Höhe zwischen 1 und 2 Meter liegt.

$$\overline{AC} = \overline{SC} - \overline{SA} = 1{,}8\,\text{m} - 0{,}6\,\text{m} = 1{,}2\,\text{m}$$

Dieser Streifen kommt wegen der Symmetrie des Raumes zwei mal vor. Weil in diesem Bereich die Fläche nur halb zur Wohnfläche zählt, nimmt man einfach nur einen Streifen.

$$A_{halb} = l \cdot \overline{AC} = 8\,\text{m} \cdot 1{,}2\,\text{m} = 9{,}6\,\text{m}^2$$

Der Bereich über 2 Meter liegt zwischen C und E. Diese Strecke kann berechnet werden.

$$\overline{CE} = \overline{SE} - \overline{SC} = 3\,\text{m} - 1{,}8\,\text{m} = 1{,}2\,\text{m}$$

Auch dieser Streifen liegt doppelt vor. Die volle Fläche kann berechnet werden.

$$A_{voll} = 2 \cdot l \cdot \overline{CE} = 2 \cdot 8\,\text{m} \cdot 1{,}2\,\text{m} = 19{,}2\,\text{m}^2$$

$$A_{Wohn} = A_{halb} + A_{voll} = 9{,}6\,\text{m}^2 + 19{,}2\,\text{m}^2 = 28{,}8\,\text{m}^2$$

Ergebnis: Die gesamte Wohnfläche beträgt: $\boxed{A = 28{,}8\,\text{m}^2}$